A

Momentos de áreas

A.1 PRIMER MOMENTO DE UN ÁREA: CENTROIDE DE UN ÁREA

Sea un área A en el plano xy (figura A.1). Si x y y son las coordenadas de un elemento de área dA, definimos el *primer momento del área A con respecto al eje x* como la integral

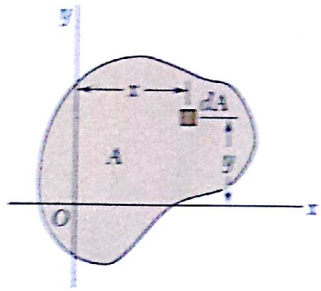


Figura A.1

$$Q_x = \int_A y\, dA \tag{A.1}$$

Análogamente, el *primer momento del área A con respecto al eje y* es la integral

$$Q_y = \int_A x\, dA \tag{A.2}$$

Observe que cada una de estas integrales puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo de la posición de los ejes. Si se usan unidades SI, los primeros momentos Q_x y Q_y se expresan en m^3 o mm^3; en unidades usuales en Estados Unidos se expresan en ft^3 o $in.^3$.

El *centroide del área A* se define como el punto C de coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ (figura A.2) que satisfacen las relaciones

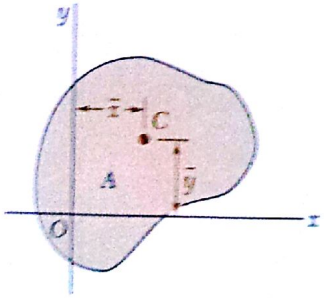


Figura A.2

$$\int_A x\, dA = A\bar{x} \qquad \int_A y\, dA = A\bar{y} \tag{A.3}$$

Comparando las ecuaciones (A.1) y (A.2) con las ecuaciones (A.3) se nota que los primeros momentos del área A pueden expresarse como los productos del área por las coordenadas de su centroide:

$$Q_x = A\bar{y} \qquad Q_y = A\bar{x} \tag{A.4}$$

Generated by CamScanner from intsig.com

Cuando un área posee un *eje de simetría*, el primer momento del área con respecto a su eje es cero. Ciertamente, considerando el área A de la figura A.3, simétrica con respecto al eje y se observa que a todo elemento dA de abscisa x corresponde un elemento de área dA' con abscisa $-x$. Se sigue que la integral en la ecuación (A.2) es cero y que $Q_y = 0$. Se sigue también, de la primera de las relaciones (A.3), que $\bar{x} = 0$. Por lo tanto, si un área posee un eje de simetría, su centroide estará en ese eje.

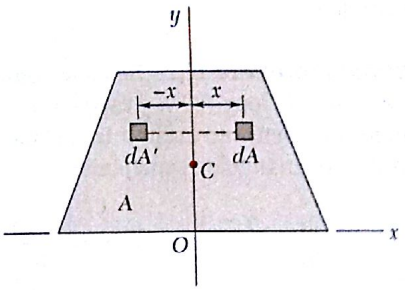


Figura A.3

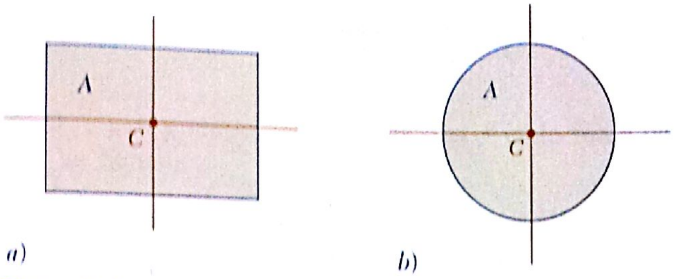


Figura A.4

Como un rectángulo posee dos ejes de simetría (figura A.4*a*), el centroide C de un área rectangular coincide con su centro geométrico. Análogamente, el centroide de un círculo coincide con el centro del círculo (figura A.4*b*).

Cuando un área posee un *centro de simetría* O, el primer momento del área con respecto a cualquier eje en O, es cero. Considerando el área A de la figura A.5, se observa que a todo elemento dA de coordenadas x y y corresponde un elemento dA' de coordenadas $-x$ y $-y$. Se tiene que las integrales en las ecuaciones (A.1) y (A.2) son ambas cero y que $Q_x = Q_y = 0$. También se tiene de las ecuaciones (A.3) que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, esto es, el centroide del área coincide con su centro de simetría.

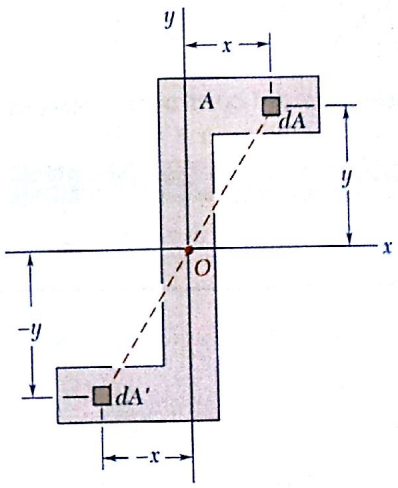


Figura A.5

Cuando el centroide C de un área puede localizarse por simetría, el primer momento de esa área con respecto a cualquier eje dado se calcula a partir de las ecuaciones (A.4). Por ejemplo, en el caso del rectángulo de la figura A.6, tenemos

$$Q_x = A\bar{y} = (bh)(\tfrac{1}{2}h) = \tfrac{1}{2}bh^2$$

y

$$Q_y = A\bar{x} = (bh)(\tfrac{1}{2}b) = \tfrac{1}{2}b^2h$$

En la mayoría de los casos, sin embargo, es necesario efectuar las integraciones indicadas en las ecuaciones (A.1) a (A.3) para determinar los primeros momentos y los centroides de un área dada. Aunque cada integral involucrada es realmente doble, en muchas aplicaciones es posible elegir elementos del área dA en la forma de delgadas tiras horizontales o verticales que reducen los cálculos a integrales de una sola variable. Esto se ilustra en el ejemplo A.01. Centroides de áreas comunes se indican en la cubierta posterior de este libro.

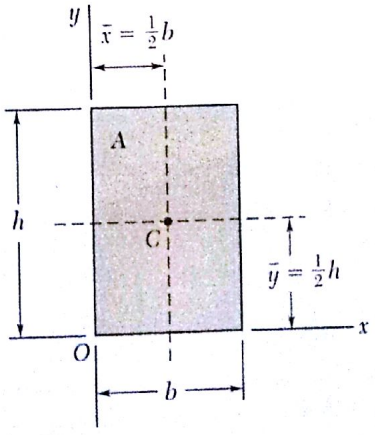


Figura A.6

Generated by CamScanner from intsig.com

EJEMPLO A.01

Para el área triangular de la figura A.7, determine, *a*) el primer momento Q_x del área con respecto al eje x, *b*) la ordenada $\bar{y}$ del centroide del área.

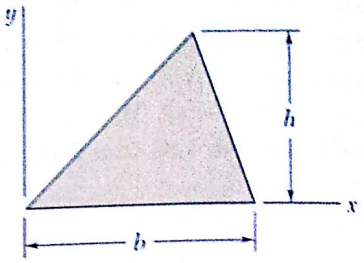


Figura A.7

a) Primer momento Q_x. Se elige como elemento de área una tira horizontal de longitud u y espesor dy, y notamos que todos los puntos del elemento están a la misma distancia y del eje x (figura A.8). Por triángulos semejantes:

$$\frac{u}{b} = \frac{h - y}{h} \qquad u = b\frac{h - y}{h}$$

y

$$dA = u\,dy = b\frac{h - y}{h}\,dy$$

El primer momento del área con respecto al eje x es:

$$Q_x = \int_A y\,dA = \int_0^h yb\frac{h - y}{h}\,dy = \frac{b}{h}\int_0^h (hy - y^2)\,dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h \qquad Q_x = \tfrac{1}{6}bh^2$$

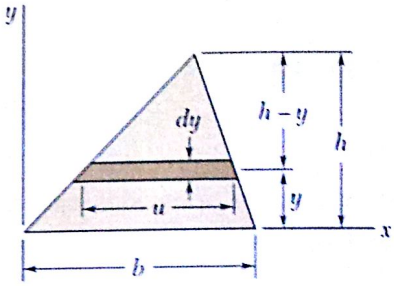


Figura A.8

b) Ordenada del centroide. Recordando la primera de las ecuaciones (A.4) y como $A = \frac{1}{2}bh$,

$$Q_x = A\bar{y} \qquad \tfrac{1}{6}bh^2 = (\tfrac{1}{2}bh)\bar{y}$$

$$\bar{y} = \tfrac{1}{3}h$$

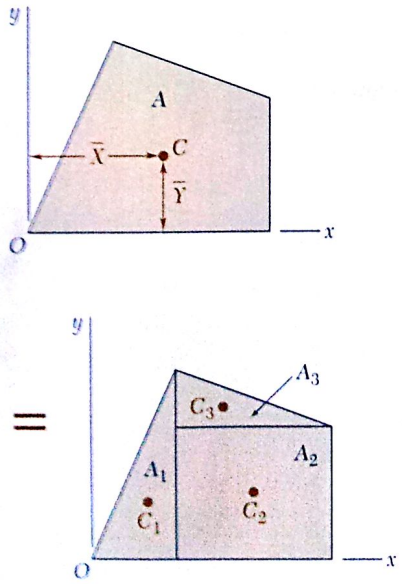


Figura A.9

A.2 DETERMINACIÓN DEL PRIMER MOMENTO Y CENTROIDE DE UN ÁREA COMPUESTA

Considere un área A, tal como el área trapezoidal de la figura A.9, que pueda dividirse en formas geométricas simples. Como se vio en la sección anterior, el primer momento Q_x del área con respecto al eje x es la integral $\int y\,dA$, que se extiende sobre el área A. Dividiendo A en componentes, A_1, A_2, A_3, se escribe

$$Q_x = \int_A y\,dA = \int_{A_1} y\,dA + \int_{A_2} y\,dA + \int_{A_3} y\,dA$$

o, recordando la segunda de las ecuaciones (A.3)

$$Q_x = A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3$$

en donde $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ y $\bar{y}_3$ son las ordenadas de los centroides de las áreas componentes. Extendiendo estos resultados a un número arbitrario de áreas com-

Generated by CamScanner from intsig.com

ponentes y notando que una expresión similar puede obtenerse para Q_y, se escribe

$$Q_x = \sum A_i \bar{y}_i \qquad Q_y = \sum A_i \bar{x}_i \tag{A.5}$$

Para obtener las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ del centroide C del área compuesta A, se sustituye $Q_x = A\bar{Y}$ y $Q_y = A\bar{X}$ en las ecuaciones (A.5). Se tiene

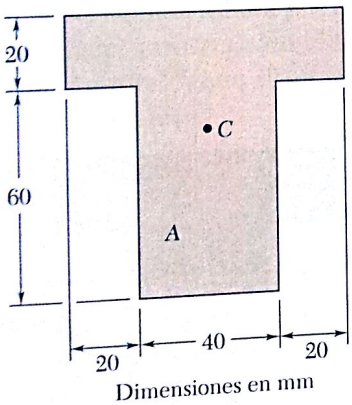
$$A\bar{Y} = \sum_i A_i \bar{y}_i \qquad A\bar{X} = \sum_i A_i \bar{x}_i$$

Resolviendo para $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ y recordando que el área A es la suma de las áreas componentes A_i, se escribe

$$\bar{X} = \frac{\sum_i A_i \bar{x}_i}{\sum_i A_i} \qquad \bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i} \tag{A.6}$$

EJEMPLO A.02

Localice el centroide C del área A mostrada en la figura A.10.

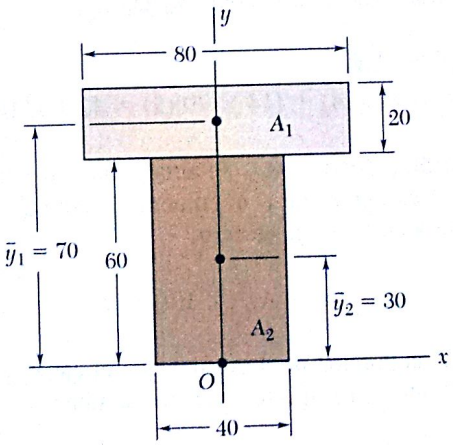


Dimensiones en mm

Figura A.10

Eligiendo el sistema de coordenadas de la figura A.11, se observa que el centroide C debe estar en el eje y puesto que este eje es de simetría; así, $\bar{X} = 0$.

Dividiendo A en sus componentes A_1 y A_2, se usa la segunda de las ecuaciones (A.6) para determinar la ordenada $\bar{Y}$ del centroide. El cálculo se realiza mejor en una tabla.



Dimensiones en mm

Figura A.11

	Área, mm²	$\bar{y}_i$, mm	$A_i\bar{y}_i$, mm³
A_1	(20)(80) = 1 600	70	112×10^3
A_2	(40)(60) = 2 400	30	72×10^3
	$\sum_i A_i = 4\,000$		$\sum_i A_i\bar{y}_i = 184 \times 10^3$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i} = \frac{184 \times 10^3 \text{ mm}^3}{4 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 46 \text{ mm}$$

Generated by CamScanner from intsig.com

EJEMPLO A.03

Refiriéndose al área A del ejemplo A.02, considere el eje horizontal x' que pasa por el centroide C (el *eje centroidal*). Si A' es la porción de A localizada sobre el eje (figura A.12), determine el primer momento de A' con respecto al eje x'.

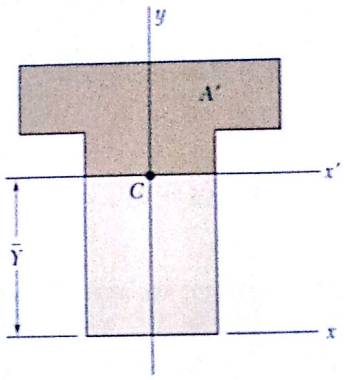
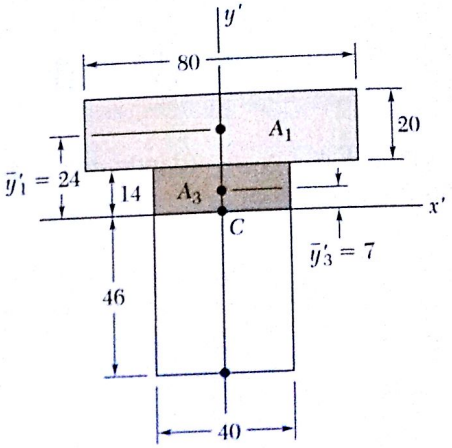


Figura A.12



Dimensiones en mm

Figura A.13

Solución. Se divide el área A' en sus componentes A_1 y A_3 (figura A.13). Recordando del ejemplo A.02 que C se localiza 46 mm sobre la base de la orilla inferior de A, se determinan las coordenadas $\bar{y}'_1$ y $\bar{y}'_3$ de A_1 y A_3 y se expresa el primer momento $Q'_{x'}$ de A' con respecto a x' como sigue:

$$Q'_{x'} = A_1\bar{y}'_1 + A_3\bar{y}'_3$$
$$= (20 \times 80)(24) + (14 \times 40)(7) = 42.3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Solución alternativa. Se nota primero que como el centroide C de A está en el eje x' el primer momento $Q_{x'}$ del *área total* A con respecto a su eje es cero:

$$Q_{x'} = A\bar{y}' = A(0) = 0$$

Llamando A'' la porción de A por debajo del eje x' y por $Q''_{x'}$ su primer momento con respecto a ese eje, se tiene

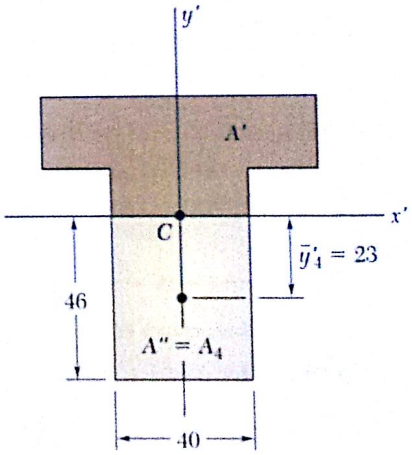
$$Q_{x'} = Q'_{x'} + Q''_{x'} = 0 \qquad \text{o} \qquad Q'_{x'} = -Q''_{x'}$$

que muestra que los primeros momentos de A' y A'' son de igual magnitud y de signo contrario. Refiriéndose a la figura A.14, se escribe

$$Q''_{x'} = A_4\bar{y}'_4 = (40 \times 46)(-23) = -42.3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

y

$$Q'_{x'} = -Q''_{x'} = +42.3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$



Dimensiones en mm

Figura A.14

Generated by CamScanner from intsig.com

A.3 SEGUNDO MOMENTO O MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA; RADIO DE GIRO

Considere de nuevo un área A en el plano xy (figura A.1) y el elemento de área dA de coordenadas x y y. El *segundo momento* o *momento de inercia* del área A con respecto al eje x, y el segundo momento, o momento de inercia, de A con respecto al eje y se define como

$$I_x = \int_A y^2\,dA \qquad I_y = \int_A x^2\,dA \tag{A.7}$$

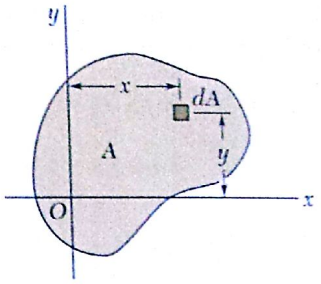


Figura A.1 (repetida)

Estas integrales son los *momentos rectangulares de inercia*, ya que se calculan de las coordenadas rectangulares del elemento dA. Mientras cada integral es realmente una integral doble, es posible en muchos casos elegir elementos de área dA en la forma de delgadas tiras horizontales o verticales de tal manera que se reduzca a una integral simple. Esto se ilustra en el ejemplo A.04.

Se define ahora el *momento polar de inercia* del área A con respecto al punto O (figura A.15) como la integral

$$J_O = \int_A \rho^2\,dA \tag{A.8}$$

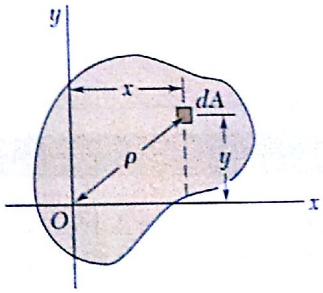


Figura A.15

en donde ρ es la distancia de O al elemento dA. Mientras esta integral es nuevamente una integral doble, es posible en el caso de un área circular elegir elementos del área dA en la forma de anillos circulares y reducir el cálculo de J_O a una integración única (véase ejemplo A.05).

Se nota, de las ecuaciones (A.7) y (A.8), que los momentos de inercia de un área son cantidades positivas. En el sistema SI, los momentos de inercia se expresan en m^4 o mm^4; en el sistema de unidades utilizado en Estados Unidos, se expresan en ft^4 o $in.^4$.

Se puede establecer una importante relación entre el momento polar de inercia J_O de un área dada y los momentos de inercia I_x e I_y de la misma área. Como $\rho^2 = x^2 + y^2$, se escribe

$$J_O = \int_A \rho^2\,dA = \int_A (x^2 + y^2)\,dA = \int_A y^2\,dA + \int_A x^2\,dA$$

o

$$J_O = I_x + I_y \tag{A.9}$$

El *radio de giro* de un área A con respecto al eje x se define como la cantidad r_x, que satisface la relación

$$I_x = r_x^2 A \tag{A.10}$$

Generated by CamScanner from intsig.com

donde I_x es el momento de inercia de A con respecto al eje x. Resolviendo la ecuación (A.10) para r_x, se tiene

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \tag{A.11}$$

De manera similar es posible definir los radios de giro con respecto al eje y y al origen O. Se escribe

$$I_y = r_y^2 A \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{A.12}$$

$$J_O = r_O^2 A \qquad r_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{A.13}$$

Sustituyendo J_O, I_x e I_y en términos de los correspondientes radios de giro en la ecuación (A.9), se observa que

$$r_O^2 = r_x^2 + r_y^2 \tag{A.14}$$

EJEMPLO A.04

Para el área rectangular de la figura A.16, halle *a*) el momento de inercia I_x del área con respecto al eje centroidal x, *b*) el radio de giro correspondiente r_x.

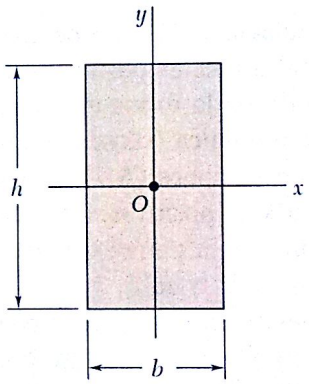


Figura A.16

a) Momento de inercia I_x. Se elige como elemento de área una tira horizontal de longitud b y espesor dy (figura A.17). Como todos los puntos de la tira tienen la misma distancia y a partir del eje x su momento de inercia con respecto al eje x es

$$dI_x = y^2\,dA = y^2(b\,dy)$$

Integrando entre $y = -h/2$ a $y = +h/2$, se tiene

$$I_x = \int_A y^2\,dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2(b\,dy) = \tfrac{1}{3}b[y^3]_{-h/2}^{+h/2}$$

$$= \tfrac{1}{3}b\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right)$$

o

$$I_x = \tfrac{1}{12}bh^3$$

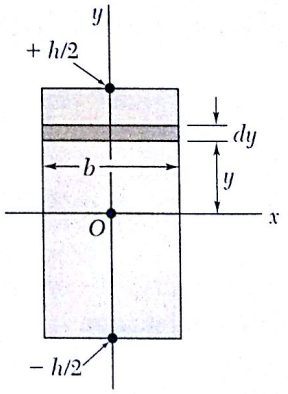


Figura A.17

b) Radio de giro r_x. De la ecuación (A.10) se tiene

$$I_x = r_x^2 A \qquad \tfrac{1}{12}bh^3 = r_x^2(bh)$$

y, despejando a r_x,

$$r_x = h/\sqrt{12}$$

Generated by CamScanner from intsig.com

EJEMPLO A.05

Para la sección circular de la figura A.18, determínese *a*) el momento polar de inercia J_O, *b*) los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y.

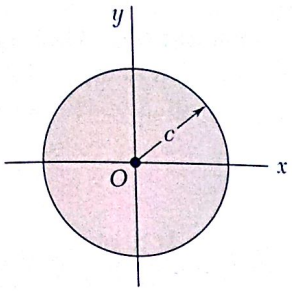


Figura A.18

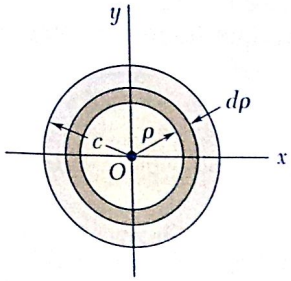


Figura A.19

a) Momento polar de inercia. Se elige como el elemento de área un anillo de radio ρ y espesor $d\rho$ (figura A.19). Como todos los puntos del anillo tienen la misma distancia ρ al origen, el momento polar de inercia del anillo será:

$$dJ_O = \rho^2\, dA = \rho^2(2\pi\rho\, d\rho)$$

Integrando en ρ de 0 a c tenemos

$$J_O = \int_A \rho^2\, dA = \int_0^c \rho^2(2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3\, d\rho$$

$$J_O = \tfrac{1}{2}\pi c^4$$

b) Momentos rectangulares de inercia. Por simetría tenemos $I_x = I_y$. Recordando la ecuación (A.9), se escribe

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \qquad \tfrac{1}{2}\pi c^4 = 2I_x$$

y, entonces

$$I_x = I_y = \tfrac{1}{4}\pi c^4$$

Los resultados obtenidos y los momentos de inercia de otras figuras geométricas comunes, se listan en una tabla en la cubierta posterior del libro.

A.4 TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Considere el momento de inercia I_x de un área con respecto a un eje arbitrario x (figura A.20). Si y es la distancia de un elemento de área dA a ese eje, recordamos de la sección A.3 que

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$

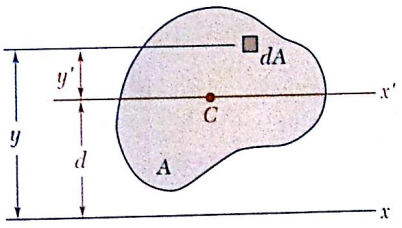


Figura A.20

Se dibuja ahora el *eje centroidal* x', es decir, el eje paralelo al eje x que pasa por el centroide C del área. Si y' es la distancia de dA a dicho eje, se escribe $y = y' + d$, donde d es la distancia entre los dos ejes. Sustituyendo por y en la integral de I_x, se escribe:

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_A (y' + d)^2 dA$$

$$I_x = \int_A y'^2\, dA + 2d \int_A y'\, dA + d^2 \int_A dA \qquad \text{(A.15)}$$

La primera integral en la ecuación (A.15) representa el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ del área con respecto al eje centroidal x'. La segunda integral representa

Generated by CamScanner from intsig.com

el primer momento $Q_{x'}$ del área con respecto al eje x' y es igual a cero ya que el centroide del área C se sitúa en ese eje. Recordando de la sección A.1 que:

$$Q_{x'} = A\bar{y}' = A(0) = 0$$

Finalmente se observa que la última integral en la ecuación (A.15) es igual al área total A. Entonces:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad^2 \tag{A.16}$$

Esta ecuación expresa que el momento de inercia I_x de un área con respecto a un eje arbitrario x es igual al momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ del área con respecto al eje centroidal x' paralelo al eje x *más* el producto Ad^2 del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes. Este resultado es el *teorema de los ejes paralelos*. Hace posible determinar el momento de inercia de un área con respecto a un eje dado, cuando se conoce el momento de inercia con respecto a un eje centroidal x' de la misma dirección. También, hace posible conocer el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ de un área A con respecto a un eje centroidal x' cuando el momento de inercia I_x de A con respecto a un eje paralelo es conocido, *restando* de I_x el producto Ad^2. Debe notarse que el teorema de ejes paralelos puede usarse *sólo si uno de los ejes involucrados es un eje centroidal.*

Una ecuación similar puede deducirse para relacionar el momento polar de inercia J_O con respecto a un punto arbitrario O y el momento polar de inercia $\bar{J}_C$ de la misma área con respecto a su centroide C. Si d es la distancia entre O y C, se escribe

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \tag{A.17}$$

A.5 DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA COMPUESTA

Considere un área compuesta A hecha de varios componentes A_1, A_2, etc. Como la integral que representa el momento de inercia de A puede dividirse en integrales que se extienden sobre A_1, A_2,... el momento de inercia de A con respecto a un eje dado se obtendrá sumando los momentos de inercia de las áreas A_1, A_2, etc., con respecto al mismo eje. El momento de inercia de un área hecha de varias de las formas comunes, que se muestra en la tabla de la cubierta de este libro, se obtiene de las fórmulas dadas en dicha tabla. Antes de añadir los momentos de las áreas componentes, sin embargo, el teorema de los ejes paralelos debe usarse para transferir cada momento de inercia al eje deseado. Esto se muestra en el ejemplo A.06.

Generated by CamScanner from intsig.com

EJEMPLO A.06

Determine el momento de inercia $\bar{I}_x$ del área mostrada con respecto al eje centroidal x (figura A.21).

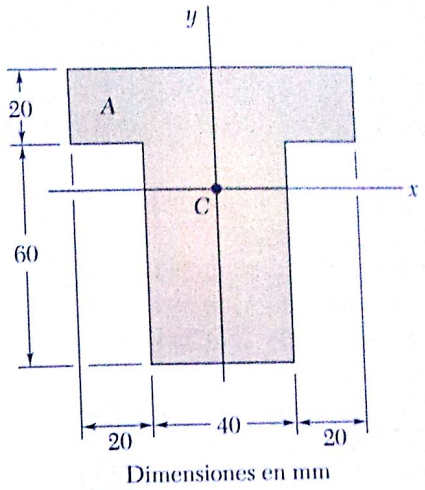


Figura A.21

Localización del centroide. Primero debe localizarse el centroide C del área. Sin embargo, esto ya se hizo en el ejemplo A.02 para el área dada. Recordamos de dicho ejemplo que C está localizado a 46 mm por encima de la base del área A.

Cálculo del momento de inercia. Se divide el área A en rectángulos A_1 y A_2 (figura A.22) y se calcula el momento de inercia de cada área con respecto al eje x.

Área rectangular A_1. Para obtener el momento de inercia $(I_x)_1$ de A_1 con respecto al eje x, se calcula primero el momento de A_1, *con respecto a su eje centroidal* x'. Recordando la ecuación deducida en la parte *a* del ejemplo A.04 para el momento centroidal de un área rectangular, se tiene

$$(\bar{I}_{x'})_1 = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(80\text{ mm})(20\text{ mm})^3 = 53.3 \times 10^3\text{ mm}^4$$

Usando el teorema de los ejes paralelos, se transfiere el momento de inercia de A_1 de su eje centroidal x' al eje paralelo x:

$$(I_x)_1 = (\bar{I}_{x'})_1 + A_1d_1^2 = 53.3 \times 10^3 + (80 \times 20)(24)^2$$
$$= 975 \times 10^3\text{ mm}^4$$

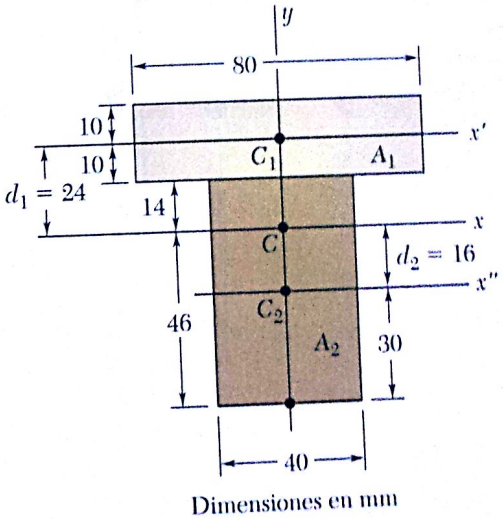


Figura A.22

Área rectangular A_2. Calculando el momento de inercia de A_2 con respecto a su eje centroidal x'', y usando el teorema de los ejes paralelos para transferirlo al eje x, se tiene

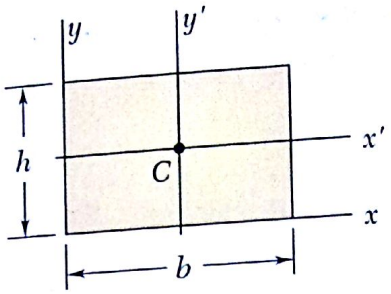
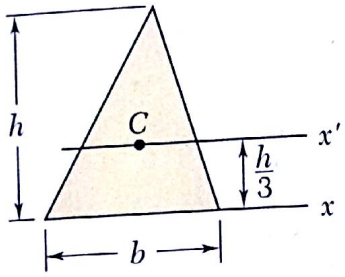
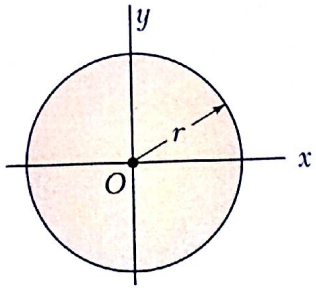
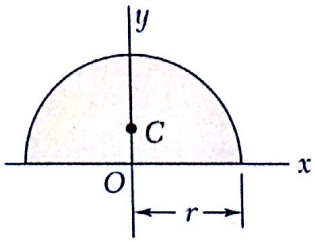
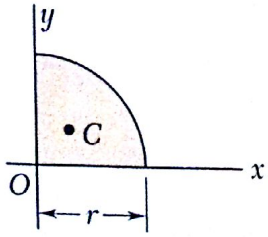
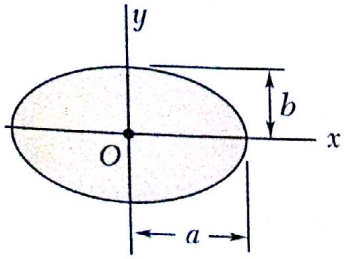
$$(\bar{I}_{x''})_2 = \tfrac{1}{12}bh^3 = \tfrac{1}{12}(40)(60)^3 = 720 \times 10^3\text{ mm}^4$$
$$(I_x)_2 = (\bar{I}_{x''})_2 + A_2d_2^2 = 720 \times 10^3 + (40 \times 60)(16)^2$$
$$= 1\,334 \times 10^3\text{ mm}^4$$

Área total A. Sumando los valores obtenidos anteriormente, para los momentos de inercia A_1 y A_2 con respecto al eje x, se encuentra el momento de inercia $\bar{I}_x$ de toda el área.

$$\bar{I}_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 = 975 \times 10^3 + 1\,334 \times 10^3$$
$$\bar{I}_x = 2.31 \times 10^6\text{ mm}^4$$

Generated by CamScanner from intsig.com

Momentos de inercia de figuras geométricas comunes

Rectángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triángulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Cuarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Generated by CamScanner from intsig.com